LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 7

Man betrachtet immer einen Körper K.

1. a) Man überprüfe, dass $K[X]$ ein K-Vektorraum ist, bezüglich die Addition der Polynome und die Multiplikation der Polymone mit Skalaren aus K.
b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche aus der folgenden Teilmengen von $K[X]$, auch Unterräume sind:

$$A = \{p \in K[X] \mid \deg p = n\},$$
$$K_n[X] = \{p \in K[X] \mid \deg p \leq n\},$$

wobei durch $\deg p$ den Grad des Polynomes p bezechnet wird?
c) Man bestimme, die Unterräume $\langle 1\rangle$, $\langle X\rangle$, $\langle 1, X\rangle$, $\langle 1, X^2\rangle$, $\langle X, X^2\rangle$, $\langle 1, X, X^2\rangle$ des Vektorraumes $K[X]$.

2. Man bestimme die Unterräume $\langle A_1, A2, A_3\rangle$ und $\langle A_1, A2, A_3, A_4\rangle$ des K-Vekrorräumes $\mathcal{M}_{2\times 2}(K)$, wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) Ist A eine Menge, so überprüfe man, dass $K^A = \{f \mid f : A \to K\}$ ein K-Vektorraum ist, bezüglich die Operationen

$$K^A \times K^A \to K^A,\ (f, g) \mapsto f + g,\ \text{wobei } (f + g)(a) = f(a) + g(a), \forall a \in A,$$
$$K \times K^A \to K^A,\ (\alpha, f) \mapsto \alpha f,\ \text{wobei } (\alpha f)(a) = \alpha f(a), \forall a \in A.$$

b) Man zeige, dass die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ Unterräume sind:

$$\mathbb{R}^\mathbb{R}_g = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist gerade}\},$$
$$\mathbb{R}^\mathbb{R}_u = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ungerade}\}.$$

(Errinnerung: Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade (ungerade)*, wenn $f(-x) = f(x)$ (bzw. $f(-x) = -f(x)$) für alle $x \in \mathbb{R}$.)
c) Man zeige, dass $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \mathbb{R}^\mathbb{R}_g \oplus \mathbb{R}^\mathbb{R}_u$.

4. Ist V ein K-Vektorraum, so ist $(\mathcal{U}(V)\ \leq)$ ein vollständiger Verband, wobei $\mathcal{U}(V) = \{S \subseteq V \mid S \leq_K V\}$. Man erkläre, wie das Infimum und das Supremum aussehen.

5. Sei V ein K-Vektorraum, und sei $S \leq_K V$. Man nennt *direkt Komplement von S* einen Unterraum $U \leq_K V$, so dass $V = S \oplus U$. Man zeige, dass ein direkter Komplement eines gegebenen Unterraum S nicht einzig ist. Hinweis: Man betrachte die Teilmengen $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$,

$U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$, $U_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$, und zeige man, dass $S, U_1, U_2 \leq \mathbb{R}^2$, und $\mathbb{R}^2 = S \oplus U_1 = S \oplus U_2$.

6. Man betrachte, einen K-Vektorraum V und zwei Teilmengen $X, Y \subseteq V$.
   a) $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$;
   b) $\langle X \cap Y \rangle \leq \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$;
   c) Man finde, je ein Beispiel, in dem in b) die Gleichung gilt bzw. gilt nicht.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`